

**Вариант 0.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 D_1$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -2; 1)$ ,  $\mathbf{c}(5; 1; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; 4; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 0; 5)$ ,  $\mathbf{c}(2; 1; -4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 3; 2)$ ,  $B(1; -1; 4)$ ,  $C(-2; 12; -1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_4$ .  $A_1(0; -9; 3)$ ,  $A_2(3; -7; 2)$ ,  $A_3(-8; -2; 0)$ ,  $A_4(4; -6; 2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-4; 1; -10)$ ,  $B(-3; 11; -10)$ ,  $C(-3; 4; -9)$ ,  $S(-3; 5; -2)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(1; -5; -4)$  параллельно прямым  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{2}$  и  $\frac{x+4}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 7; 2)$ ,  $B(17; 16; 1)$ ,  $C(8; 8; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - y + 4z - 8 = 0 \\ -x + 2y - 7z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(14; -5; -20)$  на плоскость  $-4x - y + 7z - 7 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z-8}{3}$  и плоскостью  $\pi : -2x - y - z = -10$ .

Вариант 1.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -1; -3)$ ,  $\mathbf{b}(4; -3; -5)$ ,  $\mathbf{c}(1; 0; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; 3; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-4; -7; -4)$ ,  $\mathbf{b}(1; -4; -4)$ ,  $\mathbf{c}(2; 2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 1; 3)$ ,  $B(14; 3; 4)$ ,  $C(8; 2; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(3; 0; -5)$ ,  $B(5; 1; -7)$ ,  $D(7; -1; -4)$ ,  $E(8; -5; 2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-1; 1; 1)$ ,  $B(0; -1; 2)$ ,  $C(-2; 4; -1)$ ,  $S(-8; 6; 1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; -2; 9)$  параллельно прямым  $\frac{x+8}{-1} = \frac{y+6}{-9} = \frac{z+5}{1}$  и  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-4}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 5; 1)$ ,  $B(2; -1; -7)$ ,  $C(15; 10; 8)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + 6y + z + 23 = 0 \\ -2x - 7y - z - 29 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки  $M(-30; 30; 22)$  на плоскость  $-10x + 5y + 7z = -92$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{2}$  и плоскостью  $\pi : -x - y + z = -14$ .

**Вариант 2.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; 4; -5)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 3; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; -10; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -4; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -3; 3)$ ,  $\mathbf{c}(2; 1; -4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 3; 8)$ ,  $B(-1; 4; 7)$ ,  $C(-3; 4; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(1; 4; 7)$ ,  $B(-2; 5; 4)$ ,  $D(-3; 7; 2)$ ,  $A_1(0; 2; 7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(6; 0; -7)$ ,  $B(7; -5; -7)$ ,  $C(7; 1; -6)$ ,  $S(-6; -7; -5)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-7; -3; 0)$  параллельно плоскости  $-x + 7y + 2z = 9$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+8}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 7; 9)$ ,  $B(-1; 6; 11)$ ,  $C(2; 8; 6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ 5x - 2y + 7z + 17 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(10; 27; -7)$  относительно плоскости  $5x + 9y - 2z = 32$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{-3}$  и плоскостью  $\pi : x - 2y - 3z = 8$ .

**Вариант 3.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(0; 3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 10; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(5; 1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(6; 2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -2; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 9; 7)$ ,  $B(6; 2; 15)$ ,  $C(5; 4; 12)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-1; 1; 2)$ ,  $A_2(-4; -1; -3)$ ,  $A_4(-6; -2; -5)$ ,  $B_1(-4; -1; -2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-10; 4; 5)$ ,  $B(-8; 1; 6)$ ,  $C(-9; 3; 8)$ , и найти расстояние от точки  $S(-5; 0; 3)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(9; -1; -5)$  параллельно прямой  $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{9}$  и перпендикулярно плоскости  $-x + y - 4z = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 1; 7)$ ,  $B(8; 8; 10)$ ,  $C(7; 5; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + 2y + z + 11 = 0 \\ 5x + 5y + 2z + 25 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-10; 3; 0)$  на плоскость  $-3x + 4y - 3z + 60 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{-1} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z-4}{2}$  и плоскостью  $\pi : x - 2y + z = -7$ .

**Вариант 4.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -3; 2)$ ,  $\mathbf{b}(1; 2; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-4; -8; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(4; -1; -4)$ ,  $\mathbf{b}(3; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-9; 5; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 5; 9)$ ,  $B(5; 3; 8)$ ,  $C(-8; 8; 10)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_2$ .  $A_1(9; 8; 4)$ ,  $A_2(9; 9; 6)$ ,  $A_3(4; 1; 5)$ ,  $A_4(3; 1; 5)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(8; -7; -1)$ ,  $B(10; -6; 7)$ ,  $C(9; -6; -2)$ , и найти расстояние от точки  $S(5; -4; -3)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; 8; 2)$  параллельно плоскости  $x - 2y = 9$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-6}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 4; 5)$ ,  $B(6; -1; 2)$ ,  $C(7; -3; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - 7y - z - 1 = 0 \\ -2x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(14; -18; 12)$  относительно плоскости  $5x - 8y + 3z - 5 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-8}{5}$  и плоскостью  $\pi : 2x + y + z = 5$ .

Вариант 5.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 2; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(10; 3; -10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-2; -2; -1)$ ,  $\mathbf{b}(3; 0; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-7; -4; -6)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 9; 8)$ ,  $B(3; 8; 15)$ ,  $C(6; 10; -2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ACD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B$ .  $A(0; -8; 4)$ ,  $B(-1; -10; 5)$ ,  $C(-2; -11; 0)$ ,  $D(1; -8; 9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-10; -5; 4)$ ,  $B(-11; -7; 0)$ ,  $C(-9; -4; 5)$ , и найти расстояние от точки  $S(1; 7; 0)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; -9; -9)$  параллельно прямым  $\frac{x+6}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$  и  $\frac{x-6}{-7} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 9; 4)$ ,  $B(4; 10; 5)$ ,  $C(5; 12; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0 \\ -x - y - 2 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(7; 11; -12)$  относительно плоскости  $-3x - 8y + 5z = -22$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{-1} = \frac{y+8}{1} = \frac{z+3}{4}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y + z - 5 = 0$ .

**Вариант 6.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 4; -2)$ ,  $\mathbf{b}(2; 5; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -5; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; 6; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(4; -6; 3)$ ,  $\mathbf{b}(3; -5; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 10; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 5; 1)$ ,  $B(12; 6; 1)$ ,  $C(4; 4; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ACD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B$ .  $A(-8; 4; -2)$ ,  $B(-11; 3; -5)$ ,  $C(-10; 10; -3)$ ,  $D(-10; 9; -3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; 8; 6)$ ,  $B(0; 6; 9)$ ,  $C(-1; 7; 7)$ ,  $S(-4; -5; 1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; -3; 5)$  перпендикулярно плоскостям  $-x + 2y + 5z - 5 = 0$  и  $-x + y + 2z = -1$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 2; 5)$ ,  $B(3; 1; 8)$ ,  $C(4; 1; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  

$$\begin{cases} -3x + 2y + z - 12 = 0 \\ -4x + y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-10; 4; 1)$  на плоскость  $x - y + z = -4$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-7}{1}$  и плоскостью  $\pi : 6x + 2y - z - 2 = 0$ .

**Вариант 7.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-4; -1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(3; 1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -5; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 1; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-2; -3; 6)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 1; 7)$ ,  $\mathbf{c}(1; 2; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 8; 2)$ ,  $B(4; 13; 2)$ ,  $C(5; 15; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(-6; 0; -7)$ ,  $Q(-2; -5; -5)$ ,  $R(-9; 3; -5)$ ,  $S(-9; 3; -8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; 9; 8)$ ,  $B(-12; 6; 10)$ ,  $C(-8; 11; 7)$ , и найти расстояние от точки  $S(1; 8; 8)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; 1; 8)$  параллельно прямой  $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-1}$  и перпендикулярно плоскости  $x + 9y + 4 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 2; 0)$ ,  $B(2; 4; -3)$ ,  $C(5; -3; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - y + 4z + 8 = 0 \\ -2x + 3y - 5z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-17; 31; 23)$  на плоскость  $6x - 9y - 7z - 122 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+7}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{-2}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y + 4z + 1 = 0$ .



**Вариант 8.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $AA_1$  в отношении  $3 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(3; -2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-10; 4; 8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -2; -2)$ ,  $\mathbf{b}(3; -2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-7; 6; 11)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 0; 0)$ ,  $B(4; 3; 1)$ ,  $C(11; -1; 0)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-4; 0; 7)$ ,  $A_2(-5; 1; 4)$ ,  $A_4(-1; 0; 12)$ ,  $B_1(-8; -3; 4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; 7; -1)$ ,  $B(2; 12; -3)$ ,  $C(0; 15; -4)$ ,  $S(6; -1; -7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(5; 7; -10)$  перпендикулярно плоскостям  $7x - y - 3 = 0$  и  $-3x + y - z - 2 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 6; 1)$ ,  $B(4; 11; 4)$ ,  $C(7; 7; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 3y + 9z = 0 \\ -x - 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(22; 37; -49)$  на плоскость  $-3x - 10y + 10z = -90$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -6x + 2y - z - 13 = 0$ .

**Вариант 9.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; -3; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(1; -5; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; 9; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(3; 2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(7; 4; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-20; -13; -5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 8; 8)$ ,  $B(6; 1; 7)$ ,  $C(5; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(4; 5; -9)$ ,  $A_2(3; 6; -11)$ ,  $A_4(-1; 6; -6)$ ,  $B_1(-4; 7; -4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-2; 6; 3)$ ,  $B(-1; 7; 4)$ ,  $C(1; 5; 3)$ ,  $S(0; 0; 5)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-2; 5; -9)$  параллельно прямым  $\frac{x+8}{2} = \frac{y+6}{8} = \frac{z-6}{1}$  и  $\frac{x+8}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 2; 7)$ ,  $B(5; 7; 13)$ ,  $C(4; 6; 12)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + 2y + z + 1 = 0 \\ 3x + y + z - 29 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки  $M(-34; -3; 21)$  на плоскость  $-10x + 2y + 9z = -32$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-7}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + 2y + 2z - 15 = 0$ .

**Вариант 10.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -4; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 6; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; 6; -6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; 1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 4; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(6; 12; 0)$ ,  $C(3; -7; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-8; -2; 8)$ ,  $B(-8; 1; 7)$ ,  $D(-9; 7; 5)$ ,  $E(-11; 3; 6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-1; -10; -7)$ ,  $B(-6; -8; -6)$ ,  $C(1; -9; -6)$ , и найти расстояние от точки  $S(-3; 4; -7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(1; 1; -4)$  параллельно прямым  $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$  и  $\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+8}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 3; 4)$ ,  $B(0; 5; 12)$ ,  $C(2; 4; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - 2y - 18 = 0 \\ x - y + z - 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(3; 4; -1)$  относительно плоскости  $7y + z - 2 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 2y + 3z = 6$ .

**Вариант 11.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; 3; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-5; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-6; 2; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 5; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(6; 1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(3; -16; -21)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 4; 7)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 4; 0)$ ,  $B(-1; 6; -2)$ ,  $C(2; 5; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(6; 2; 1)$ ,  $B(13; 9; -9)$ ,  $D(9; 5; -3)$ ,  $A_1(4; -1; 4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; -3; 1)$ ,  $B(-3; 2; -2)$ ,  $C(3; -6; 3)$ , и найти расстояние от точки  $S(1; -4; 6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 6; 7)$  перпендикулярно плоскостям  $-7x + 2y - z - 6 = 0$  и  $x + y = -4$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 8; 6)$ ,  $B(4; 10; 9)$ ,  $C(3; 11; 11)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x - 3y + 3 = 0 \\ 7x + 4y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(28; 1; 9)$  на плоскость  $7x + y + 6z = -7$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 2y - 3z - 9 = 0$ .

**Вариант 12.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(1; -4; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -7; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; 2; 10)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 0; 9)$ ,  $B(2; -1; 5)$ ,  $C(3; -1; 0)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(-2; -7; -3)$ ,  $D(6; -2; 1)$ ,  $A_1(-1; 0; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; -5; 6)$ ,  $B(8; 0; 5)$ ,  $C(8; -1; 6)$ ,  $S(-8; 0; -1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(9; 4; -8)$  параллельно плоскости  $-5x + 3y - 2z = 2$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 0; 8)$ ,  $B(14; 10; 11)$ ,  $C(2; -7; 6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} -x + 2y - z + 3 = 0 \\ -x + y + 2z - 10 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки  $M(-18; 12; 4)$  на плоскость  $-5x + 3y + z = 25$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+6}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 4y - 3z - 3 = 0$ .

**Вариант 13.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 2; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; 2; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 4; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 0; 1)$ ,  $\mathbf{c}(5; -6; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 6; 3)$ ,  $B(6; 8; -1)$ ,  $C(6; 7; -4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(9; 6; -6)$ ,  $A_2(10; 7; -4)$ ,  $A_4(-1; -1; -14)$ ,  $B_1(11; 7; -5)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-5; 2; -8)$ ,  $B(-6; -1; -8)$ ,  $C(-9; 0; -9)$ , и найти расстояние от точки  $S(-7; 4; -7)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-2; -3; -4)$  параллельно плоскости  $-x - y + 2z + 9 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+6}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 9; 3)$ ,  $B(5; 8; -2)$ ,  $C(0; 10; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y + 9 = 0 \\ x + 4y + z + 21 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(8; 23; -9)$  на плоскость  $-x - 10y + 4z = 77$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{-2} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-8}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -2x - y - z - 10 = 0$ .

**Вариант 14.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $AB$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; -3; 6)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 3; -3)$ ,  $\mathbf{c}(2; -1; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(0; 0; 6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; 0; 7)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -7; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 2; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 0; 5)$ ,  $B(1; -1; 6)$ ,  $C(4; 8; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(6; -8; -4)$ ,  $B(10; -13; -3)$ ,  $D(8; -12; -7)$ ,  $E(9; -14; -9)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; -9; 3)$ ,  $B(8; -6; 6)$ ,  $C(8; -7; 2)$ ,  $S(-4; -2; 4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 4; 3)$  перпендикулярно плоскостям  $3x - 7y - 2z = 0$  и  $-x - y + z = -4$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 9; 1)$ ,  $B(8; 8; 2)$ ,  $C(5; 12; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - 5z + 9 = 0 \\ x + 2y - 2z + 19 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-25; -1; 15)$  относительно плоскости  $9x - 7z + 5 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{5}$  и плоскостью  $\pi : x - y + z + 3 = 0$ .

**Вариант 15.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -3; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; -1; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 8\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(2; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(7; 4; 6)$ ,  $\mathbf{c}(-13; -2; -12)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 3; 1)$ ,  $B(6; 5; 1)$ ,  $C(6; 10; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-3; 8; 8)$ ,  $B(0; 13; 13)$ ,  $C(-2; 9; 12)$ ,  $D(-2; 13; 4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3; 4; -10)$ ,  $B(2; 6; -9)$ ,  $C(-6; 3; -10)$ , и найти расстояние от точки  $S(-2; 8; -1)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(2; 9; 2)$  параллельно плоскости  $3x - 4y + z + 2 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 1; 5)$ ,  $B(0; -4; 2)$ ,  $C(0; -5; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + y + 19 = 0 \\ -2x + y + z + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(7; 1; 8)$  относительно плоскости  $2x - y + 3z - 2 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+5}{2}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y - 3z - 3 = 0$ .



**Вариант 16.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -2; 5)$ ,  $\mathbf{b}(3; 1; 0)$ ,  $\mathbf{c}(5; 2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 0; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(1; -2; 6)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 3; -7)$ ,  $\mathbf{c}(2; -2; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 6; 5)$ ,  $B(0; 9; 5)$ ,  $C(-3; 13; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(7; 0; 0)$ ,  $B(0; -6; 3)$ ,  $D(8; 3; -2)$ ,  $E(6; -4; 3)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(5; -10; -9)$ ,  $B(13; -8; -8)$ ,  $C(2; -11; -9)$ , и найти расстояние от точки  $S(-2; 1; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; 1; -8)$  параллельно прямым  $\frac{x+6}{-1} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+1}{1}$  и  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 2; 6)$ ,  $B(3; 5; 4)$ ,  $C(1; 0; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 3x - 5y + z + 25 = 0 \\ -2x + 4y - z - 24 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(0; 6; 20)$  на плоскость  $x - 6y - 9z - 20 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-7}{-5} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-5}{2}$  и плоскостью  $\pi : x - y - z = 15$ .

**Вариант 17.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -3; 4)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; 3)$ ,  $\mathbf{c}(1; -4; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; -5; 6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; -4)$ ,  $\mathbf{b}(3; -1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 5; 7)$ ,  $B(1; 6; 7)$ ,  $C(8; 6; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $R$ .  $P(-2; 3; -9)$ ,  $Q(-6; -4; -11)$ ,  $R(5; 5; -12)$ ,  $S(0; 3; -10)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(4; -6; -7)$ ,  $B(0; -8; -6)$ ,  $C(13; -1; -10)$ , и найти расстояние от точки  $S(-2; -7; 1)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(5; -2; 0)$  параллельно плоскости  $x + y - z + 7 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+8}{1} = \frac{z-5}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 2; 9)$ ,  $B(11; -1; 16)$ ,  $C(6; 3; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 6x + 2y - z + 21 = 0 \\ -7x - y + z - 15 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-4; 15; -22)$  на плоскость  $x + 4y - 5z = -2$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{1}$  и плоскостью  $\pi : x - 2y - 5z = 1$ .

**Вариант 18.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(4; 3; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -3; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; -4; -9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-7; 1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; 5; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 2; 3)$ ,  $B(0; -3; 5)$ ,  $C(10; 4; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-2; 2; -9)$ ,  $B(-5; -1; -4)$ ,  $D(4; 3; -14)$ ,  $E(0; 0; -8)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-1; 8; 5)$ ,  $B(0; 7; 9)$ ,  $C(-2; 10; -2)$ ,  $S(8; -4; 7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-8; -5; 4)$  перпендикулярно плоскостям  $-x + 2y + 2 = 0$  и  $-x + y - z = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 8; 0)$ ,  $B(4; 1; 3)$ ,  $C(-5; 17; -4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y - 7z - 4 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(9; 7; 24)$  на плоскость  $5x + 6y + 8z = 29$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{-1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+2}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -x + 2y - z = -3$ .

**Вариант 19.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; 3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-6; 3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(5; -1; 0)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-10; 2; 1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 8\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(9; 4; -6)$ ,  $\mathbf{b}(4; 1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-6; -1; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 8; 7)$ ,  $B(6; 6; 8)$ ,  $C(-1; 15; 5)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(-9; 1; -3)$ ,  $A_2(-7; -3; -2)$ ,  $A_3(-6; -5; -1)$ ,  $A_4(-4; 6; -1)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(6; 1; 3)$ ,  $B(7; 0; 4)$ ,  $C(4; 4; 3)$ , и найти расстояние от точки  $S(7; 0; 3)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(7; 6; 3)$  перпендикулярно плоскостям  $-2x + 3y + 7z = -1$  и  $x - 2y - 3z = 7$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 6; 7)$ ,  $B(13; 9; 11)$ ,  $C(15; 10; 12)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z + 24 = 0 \\ 2x - y + z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-7; 11; 6)$  на плоскость  $-x - y + z - 11 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 4y + 3z + 9 = 0$ .

**Вариант 20.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $3 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(5; 1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; -5)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -1; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; 4; 10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(9; -18; -7)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 6; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 5; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 4; 7)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(-5; 9; 14)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-4; -3; -3)$ ,  $A_2(-4; 2; -2)$ ,  $A_4(-6; 5; 0)$ ,  $B_1(-5; 3; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-4; -2; -3)$ ,  $B(-3; -1; -4)$ ,  $C(-3; 6; -3)$ ,  $S(6; 4; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-3; -1; 0)$  параллельно прямой  $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+6}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $3x - 3y + z = 3$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 2; 8)$ ,  $B(13; 0; 11)$ ,  $C(6; 3; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -8x + 2y - z + 5 = 0 \\ 7x - y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(9; 5; -6)$  на плоскость  $-4x - 3y + 2z = -5$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 5x + 4y - 2z = -7$ .

**Вариант 21.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 D_1$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(1; 1; 3)$ ,  $\mathbf{c}(0; 5; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; -4; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; -1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 4; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 1; 7)$ ,  $B(12; 4; 5)$ ,  $C(4; 0; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQR$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $S$ .  $P(-6; 1; 6)$ ,  $Q(-3; -4; 1)$ ,  $R(-7; -1; 7)$ ,  $S(-7; 9; 8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-1; 7; -5)$ ,  $B(-10; 6; -5)$ ,  $C(9; 8; -6)$ , и найти расстояние от точки  $S(6; -5; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(3; -2; -2)$  параллельно плоскости  $x - 3y - z - 7 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 2; 9)$ ,  $B(4; 4; 8)$ ,  $C(2; 5; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 10x + y - 8 = 0 \\ -7x - y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-10; -15; -1)$  на плоскость  $3x + 4y + z - 13 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-7}{-1}$  и плоскостью  $\pi : x - 3y - 2z = -2$ .

**Вариант 22.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(1; 2; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; 4; 4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(5; -6; -4)$ ,  $\mathbf{b}(6; -7; -5)$ ,  $\mathbf{c}(-17; 21; 10)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 7; 3)$ ,  $B(6; 4; 7)$ ,  $C(8; 9; 2)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-9; -8; -3)$ ,  $B(-11; -7; -6)$ ,  $D(-8; -5; -1)$ ,  $E(-7; -7; 0)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3; 2; -9)$ ,  $B(-1; 4; -8)$ ,  $C(-4; 5; -7)$ , и найти расстояние от точки  $S(-8; 5; -6)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-1; 2; -1)$  параллельно плоскости  $-x + 3y - 2z + 9 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 1; 8)$ ,  $B(8; 0; 10)$ ,  $C(13; 4; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + y - 2z + 12 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(9; -12; -7)$  относительно плоскости  $9x - 8y - 5z = -43$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+1}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 3y + z = 15$ .

**Вариант 23.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $AA_1$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; -3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 0; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; -5; -6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -5\mathbf{m} - 6\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(5; 5; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(5; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 8; 8)$ ,  $B(-7; 7; 8)$ ,  $C(8; 9; 7)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-8; 1; -6)$ ,  $B(1; -3; -9)$ ,  $D(-15; 4; -4)$ ,  $A_1(-1; -2; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-10; 6; -6)$ ,  $B(-9; 5; -7)$ ,  $C(-11; 8; -3)$ , и найти расстояние от точки  $S(-3; 3; -4)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-8; 5; -7)$  параллельно прямой  $\frac{x+7}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{3}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x - 2y + 5z = 7$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 2; 7)$ ,  $B(4; 5; 6)$ ,  $C(3; 7; 6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x + 3y - 5z - 11 = 0 \\ -9x - 4y + 7z + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-20; 2; -20)$  относительно плоскости  $9x + y + 8z - 27 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{-5} = \frac{y-6}{5} = \frac{z}{-2}$  и плоскостью  $\pi : x - y + z - 14 = 0$ .



**Вариант 24.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -2; -6)$ ,  $\mathbf{c}(0; 1; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; -3; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_y \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(3; -3; 5)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 10; -15)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 6; 8)$ ,  $B(5; 7; 8)$ ,  $C(10; 7; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(3; 4; 7)$ ,  $B(2; 2; 12)$ ,  $C(6; 9; 11)$ ,  $D(4; 6; 17)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-4; -9; 8)$ ,  $B(1; -10; 9)$ ,  $C(-3; -11; 9)$ , и найти расстояние от точки  $S(-7; -8; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; -6; 3)$  параллельно плоскости  $2x + y - 7z - 1 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+1}{-8}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 3; 8)$ ,  $B(8; 2; 6)$ ,  $C(0; 5; 11)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - 2y + 10z + 6 = 0 \\ -x + y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-12; -14; -20)$  на плоскость  $-5x - y - 3z + 6 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+7}{1}$  и плоскостью  $\pi : x + y - 6z = 10$ .

**Вариант 25.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-4; -1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(5; -2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(3; -1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(6; 9; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-9; 1; 8)$ ,  $\mathbf{b}(6; 1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(4; 1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 7; 9)$ ,  $B(4; 9; 10)$ ,  $C(4; 6; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(-1; 3; 2)$ ,  $A_2(0; -3; -5)$ ,  $A_3(-1; 8; 9)$ ,  $A_4(-3; 4; 3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; 8; -4)$ ,  $B(-2; 9; -4)$ ,  $C(-7; 9; -3)$ ,  $S(-1; 7; -6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(7; 0; 2)$  перпендикулярно плоскостям  $-x + 2y - 5z = 3$  и  $-2x + 3y - 6z + 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 5; 6)$ ,  $B(2; 2; 4)$ ,  $C(-2; 15; 13)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -7x + 5y - 3z - 2 = 0 \\ -3x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-37; -16; -40)$  на плоскость  $-9x - 3y - 10z = 211$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+6}{2}$  и плоскостью  $\pi : x + y + 3z + 7 = 0$ .

**Вариант 26.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -4; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 3; 1)$ ,  $\mathbf{c}(2; -3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-5; 8; -7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-5; -6; -4)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 6; 2)$ ,  $B(2; 7; 2)$ ,  $C(9; 7; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-3; 6; 0)$ ,  $B(0; 5; -2)$ ,  $D(-5; 15; 1)$ ,  $A_1(0; 1; -2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(10; -1; 3)$ ,  $B(11; 3; 4)$ ,  $C(12; 8; 6)$ , и найти расстояние от точки  $S(-8; 8; 8)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(2; 1; 6)$  перпендикулярно плоскостям  $-x + y + z = -5$  и  $8x - 2y - z - 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 3; 5)$ ,  $B(6; -2; 14)$ ,  $C(-1; 7; -2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + 3y - z - 3 = 0 \\ 7x - 5y + 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-3; 6; -14)$  относительно плоскости  $y - 7z = 29$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-7}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - y + 3z = 0$ .

**Вариант 27.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -5; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-4; 3; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(8; 6; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 8\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; -6; -13)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 4; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 4; 2)$ ,  $B(3; 1; 3)$ ,  $C(2; 5; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(2; -9; 7)$ ,  $B(-4; -5; 2)$ ,  $D(3; -4; 10)$ ,  $E(2; -12; 6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3; 6; 6)$ ,  $B(4; 9; 7)$ ,  $C(-2; 5; 6)$ , и найти расстояние от точки  $S(3; -6; 0)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-2; -4; 0)$  перпендикулярно плоскостям  $-4x + y - 2z = 0$  и  $5x - y + 3z = 1$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 9; 9)$ ,  $B(12; 14; 11)$ ,  $C(13; 16; 12)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x + 7y - z - 18 = 0 \\ -x + 6y - z - 10 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-19; -21; 10)$  на плоскость  $-3x - 4y + 4z - 17 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-5}{7} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-3}{3}$  и плоскостью  $\pi : -x - y + z - 12 = 0$ .

**Вариант 28.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 2; 1)$ ,  $\mathbf{c}(1; -2; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; -3; 9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 6\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(6; 1; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 9; 4)$ ,  $B(5; 8; 6)$ ,  $C(3; 12; 5)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-5; -9; -3)$ ,  $B(0; -15; 1)$ ,  $D(1; -15; 2)$ ,  $A_1(-3; -10; -1)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(3; -8; -5)$ ,  $B(9; -6; -4)$ ,  $C(2; -7; -4)$ , и найти расстояние от точки  $S(8; 4; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-9; -2; -2)$  параллельно прямой  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-4}{-2}$  и перпендикулярно плоскости  $2x - 3y - z = -3$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 8; 3)$ ,  $B(11; 4; -6)$ ,  $C(10; 5; -4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 12 = 0 \\ 3x - y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-3; 6; -2)$  относительно плоскости  $-3x + 9y - 4z - 18 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-8}{3}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y + z = -1$ .

**Вариант 29.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 D_1$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(5; 2; -4)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-5; -3; 1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(5; -7; -4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 4; 2)$ ,  $B(2; 3; 1)$ ,  $C(9; 6; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQR$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $S$ .  $P(3; 4; 9)$ ,  $Q(6; 0; 3)$ ,  $R(7; 3; 7)$ ,  $S(5; 7; 14)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(4; -3; 1)$ ,  $B(6; -8; 4)$ ,  $C(3; -4; 0)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; 4; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-3; -5; -5)$  параллельно прямой  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-4}{-1}$  и  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 1; 2)$ ,  $B(-3; -7; 4)$ ,  $C(4; 4; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ -2x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(6; -6; -23)$  на плоскость  $-x - 8y - 8z + 32 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-5}{1} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z+6}{2}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y - 3z = -9$ .

**Вариант 30.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -5; -6)$ ,  $\mathbf{b}(0; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; -4; -7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 4\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(5; 3; 5)$ ,  $\mathbf{c}(1; -4; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 6; 9)$ ,  $B(1; 7; 10)$ ,  $C(0; 5; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(-1; 0; 0)$ ,  $Q(-2; -2; -4)$ ,  $R(-2; 10; -4)$ ,  $S(1; -5; 7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(0; -10; 6)$ ,  $B(3; -8; 11)$ ,  $C(1; -9; 8)$ ,  $S(0; 3; -8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-2; 3; 6)$  параллельно плоскости  $-3x + 2y - 5z - 9 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+6}{-2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{-2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 6; 7)$ ,  $B(8; 10; 4)$ ,  $C(5; -1; 12)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} x + 4y - 8 = 0 \\ -x - 7y + z + 15 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(22; -19; -1)$  относительно плоскости  $7x - 8y - z = 22$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{-2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-2}{-1}$  и плоскостью  $\pi : -4x + 2y + z = -14$ .

**Вариант 31.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -7; 4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(1; 4; -5)$ ,  $\mathbf{c}(3; -1; -5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 0; 9)$ ,  $B(5; -2; 16)$ ,  $C(5; -1; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-7; 5; -4)$ ,  $A_2(-6; 2; -4)$ ,  $A_4(-12; 9; -7)$ ,  $B_1(-4; 3; -2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; -1; -2)$ ,  $B(-10; -2; 0)$ ,  $C(-7; 0; 1)$ , и найти расстояние от точки  $S(-5; -1; 0)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(8; 4; -2)$  перпендикулярно плоскостям  $x - y - 5z - 2 = 0$  и  $-x + 2y + 8z - 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 0; 7)$ ,  $B(2; 1; 9)$ ,  $C(6; -4; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 10y + 2z - 23 = 0 \\ -x + y - z - 4 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-8; -9; 17)$  на плоскость  $6x + 9y - 7z = 84$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 3y - 3z = -3$ .



**Вариант 32.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(6; 2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(4; 0; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; 2; -7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 8\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(8; 0; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-4; -5; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -4; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 9; 8)$ ,  $B(5; 12; 10)$ ,  $C(2; 10; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $BCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A$ .  $A(-3; -3; 4)$ ,  $B(-1; -1; 9)$ ,  $C(-4; -4; 2)$ ,  $D(-5; 4; 3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(1; -5; 0)$ ,  $B(2; -4; 0)$ ,  $C(-1; -4; 1)$ ,  $S(-1; -3; 3)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 3; -2)$  перпендикулярно плоскостям  $6x + 2y + z = 8$  и  $7x + y + z = 3$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 3; 3)$ ,  $B(10; 2; -2)$ ,  $C(11; 2; -4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 5y - z - 11 = 0 \\ -x - y + z + 15 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(17; 25; 0)$  на плоскость  $10x + 9y - 2z - 25 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+8}{-1}$  и плоскостью  $\pi : x + 3y - 2z - 15 = 0$ .

**Вариант 33.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 5; -3)$ ,  $\mathbf{b}(0; 2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 3; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 1; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-3; -3; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-8; -7; 10)$ ,  $\mathbf{c}(4; 5; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 3; 2)$ ,  $B(7; 4; 6)$ ,  $C(7; 5; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(8; 0; -7)$ ,  $B(11; 2; -2)$ ,  $D(6; -3; -13)$ ,  $A_1(7; 4; -2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(0; -3; 4)$ ,  $B(1; -6; 5)$ ,  $C(-3; 2; 2)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; -8; -8)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(6; -5; -5)$  перпендикулярно плоскостям  $-x + 2y + z - 5 = 0$  и  $-x + y - 3z = -2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 1; 5)$ ,  $B(8; 6; 7)$ ,  $C(-2; -1; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x - 3y + 6z + 9 = 0 \\ -x + y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(3; -6; 5)$  относительно плоскости  $2x + 3y - z = -10$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{-2} = \frac{y+8}{1} = \frac{z+8}{-1}$  и плоскостью  $\pi : x + 3y - z - 5 = 0$ .

**Вариант 34.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $AA_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 4; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -5; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; 0; 7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(10; 2; -1)$ ,  $\mathbf{b}(1; -5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 8; 1)$ ,  $B(3; 5; 2)$ ,  $C(8; 16; -1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $R$ .  $P(0; -7; -8)$ ,  $Q(3; 0; -10)$ ,  $R(-2; 2; -6)$ ,  $S(1; -4; -9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(10; 7; 3)$ ,  $B(11; 6; 4)$ ,  $C(7; 11; 2)$ , и найти расстояние от точки  $S(-1; 1; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; -7; -4)$  параллельно прямой  $\frac{x}{-7} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x + y = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 8; 1)$ ,  $B(3; 1; 9)$ ,  $C(3; 2; 8)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -2x + y - z - 25 = 0 \\ -x + 2y - z - 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(15; 35; 35)$  на плоскость  $6x + 9y + 10z = -113$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+8}{2}$  и плоскостью  $\pi : x + 3y - z = 14$ .

**Вариант 35.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; -1; 0)$ ,  $\mathbf{b}(3; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -1; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(7; -6; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(5; -6; -1)$ ,  $\mathbf{b}(6; -5; 7)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 2; 3)$ ,  $B(9; 3; 3)$ ,  $C(9; 6; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(1; 1; 2)$ ,  $A_2(2; -1; 10)$ ,  $A_4(2; -1; 7)$ ,  $B_1(-1; 4; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(4; -3; -1)$ ,  $B(2; -2; -2)$ ,  $C(5; -1; -2)$ ,  $S(-7; -4; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 0; 9)$  параллельно прямым  $\frac{x+7}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-3}{0}$  и  $\frac{x-6}{-1} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 0; 6)$ ,  $B(6; -1; 5)$ ,  $C(10; 2; 10)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - 6y - z + 23 = 0 \\ x + y - 15 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки  $M(41; 32; 35)$  на плоскость  $9x + 6y + 10z = 43$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + 2y - 3z - 3 = 0$ .

**Вариант 36.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $AA_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-4; -5; 5)$ ,  $\mathbf{b}(3; 5; -6)$ ,  $\mathbf{c}(0; 2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; 5; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-3; 7; 6)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(5; -15; -12)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 1; 0)$ ,  $B(6; 0; -3)$ ,  $C(1; 3; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(0; -8; -7)$ ,  $B(-4; -9; -2)$ ,  $D(-5; -12; -4)$ ,  $E(-1; -10; -8)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-9; -1; -10)$ ,  $B(-8; 4; -10)$ ,  $C(-10; -4; -9)$ ,  $S(-7; 0; 0)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 0; 0)$  параллельно прямым  $\frac{x-6}{-3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$  и  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+7}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 4; 8)$ ,  $B(5; 5; 5)$ ,  $C(4; 5; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z + 11 = 0 \\ 2x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-3; 28; 27)$  на плоскость  $3x - 10y - 6z + 16 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-7}{2}$  и плоскостью  $\pi : x + y - 5z = -13$ .

**Вариант 37.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $3 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; 1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(0; -1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(3; -2; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; -2; -8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-4; 3; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-9; 4; 10)$ ,  $\mathbf{c}(4; -3; -4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 3; 0)$ ,  $B(10; 5; 1)$ ,  $C(5; 4; 1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $BCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A$ .  $A(-2; -2; -2)$ ,  $B(-4; -6; -5)$ ,  $C(1; -7; -6)$ ,  $D(-10; -4; -4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(2; -6; 7)$ ,  $B(-8; -4; 8)$ ,  $C(3; -7; 7)$ ,  $S(-1; -8; 4)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(2; -1; -3)$  параллельно плоскости  $x - 8y + z + 1 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 0; 4)$ ,  $B(7; 1; 4)$ ,  $C(16; -4; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -9x + y - z - 18 = 0 \\ 10x - y + 2z + 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(1; -1; -4)$  относительно плоскости  $8x - y + z + 28 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{1}$  и плоскостью  $\pi : -3x + 2y + z = 7$ .

**Вариант 38.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -4; -1)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -2; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; 2; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(3; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(4; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 3; 9)$ ,  $B(6; 2; 8)$ ,  $C(3; 4; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-3; -9; -8)$ ,  $B(-3; -8; -17)$ ,  $D(2; -11; -11)$ ,  $E(-4; -9; -4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(1; 10; 2)$ ,  $B(-9; 13; 0)$ ,  $C(-6; 12; 1)$ ,  $S(-4; -1; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-9; -2; -3)$  параллельно прямой  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z+8}{1}$  и  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-4}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 3; 0)$ ,  $B(3; 4; 0)$ ,  $C(-2; 6; -1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + 2y - z - 2 = 0 \\ -5x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(11; 1; 13)$  относительно плоскости  $9x + 2y + 9z = -31$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$  и плоскостью  $\pi : -x - 2y - 2z + 2 = 0$ .

**Вариант 39.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(3; -5; -5)$ ,  $\mathbf{c}(3; -2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; 4; 7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 7\mathbf{m} - 9\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(8; 2; -7)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 7; 0)$ ,  $B(-1; 8; 3)$ ,  $C(-5; 11; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-3; 0; 1)$ ,  $A_2(4; 2; 2)$ ,  $A_4(-2; 7; 5)$ ,  $B_1(-4; -2; 0)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(2; 7; 0)$ ,  $B(4; 8; 0)$ ,  $C(9; 6; 1)$ ,  $S(0; 6; 6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; 10; -4)$  параллельно плоскости  $-x + y + z = 2$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{-4}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 2; 5)$ ,  $B(2; 3; 5)$ ,  $C(1; 3; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z + 27 = 0 \\ -x + 5y + 2z - 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-18; -19; -9)$  на плоскость  $-2x - 5y - 4z = -13$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 4x + 4y - 5z = -9$ .