

Вариант 0.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро AB в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(0; -3; 2)$, $\mathbf{b}(-1; 3; -3)$, $\mathbf{c}(2; -1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; 6; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 6\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(8; -22; 9)$, $\mathbf{b}(1; -1; 2)$, $\mathbf{c}(-2; 7; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 9; 5)$, $B(-3; 10; 7)$, $C(-2; 10; 8)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(4; 7; 6)$, $B(6; 10; 0)$, $C(2; 6; 9)$, $D(3; 7; 8)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-3; 9; -7)$, $B(-5; 9; -8)$, $D(-6; 8; -8)$, $A_1(-3; 17; -14)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 5y - 8z = 12$ и $\beta : y - z + 13 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(9; 2; 0)$, $B(8; 0; -3)$, $C(11; 5; 7)$, и найти расстояние от точки $S(0; 5; -2)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; -2; -8)$ перпендикулярно плоскостям $2x - 3y + z - 2 = 0$ и $x - 2y + z + 4 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 3; 3)$, $B(3; 4; 0)$, $C(8; 1; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 8y + 2z - 15 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-40; 31; -1)$ на плоскость $8x - 8y - z + 51 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+7}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{-4}$ и плоскостью $\pi : x + y + 2z + 7 = 0$.

Вариант 1.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; 1; 2)$, $\mathbf{b}(3; 1; 3)$, $\mathbf{c}(6; 2; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; 0; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-2; 4; -5)$, $\mathbf{b}(-2; -2; -3)$, $\mathbf{c}(1; 1; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 6; 9)$, $B(3; 7; 11)$, $C(4; 7; 12)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(7; 0; 7)$, $B(6; 0; 8)$, $C(8; -2; 4)$, $D(7; -1; 6)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-6; -6; -1)$, $B(-5; -9; 2)$, $D(-7; -8; 2)$, $A_1(-9; -4; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 3y - z = -9$ и $\beta : -2x - 3y = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-1; 4; 7)$, $B(-8; 5; 7)$, $C(7; 3; 8)$, $S(-3; 1; -6)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(9; -5; -10)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{-3} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+8}{1}$ и перпендикулярно плоскости $-x - y = 7$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 5; 0)$, $B(2; -1; -4)$, $C(3; 0; -3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + y + z + 7 = 0 \\ 5x + y + 2z + 11 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-7; -6; 11)$ на плоскость $5x + 2y - 5z - 6 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-6}{-1}$ и плоскостью $\pi : x + y + 3z - 4 = 0$.

Вариант 2.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро BC в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; 3)$, $\mathbf{b}(0; -2; 3)$, $\mathbf{c}(2; -2; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 2; -7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 6\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-2; 3; 6)$, $\mathbf{b}(-3; 1; 3)$, $\mathbf{c}(9; -5; -8)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 3; 5)$, $B(-1; 0; -5)$, $C(1; 5; 12)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(9; 1; 6)$, $B(12; 8; 9)$, $C(7; -5; 3)$, $D(8; 4; 10)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_2 . $A_1(-8; -9; 3)$, $A_2(-9; -10; 1)$, $A_3(-11; -13; -6)$, $A_4(-4; -4; -4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - z + 5 = 0$ и $\beta : -x - 6y + 2z = -3$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; 1; -6)$, $B(-4; 2; -6)$, $C(11; 0; -5)$, и найти расстояние от точки $S(7; 6; -7)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-10; 3; 2)$ параллельно прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+5}{8}$ и перпендикулярно плоскости $-x - y - 3z = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 6; 1)$, $B(-1; 7; -3)$, $C(2; 5; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - z - 5 = 0 \\ 2x + 10y - z - 12 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(9; 4; 7)$ относительно плоскости $9x + 5y + 6z = 72$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+2}{1}$ и плоскостью $\pi : 3x - y - 7z + 14 = 0$.

Вариант 3.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро DC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; -3)$, $\mathbf{b}(-1; 3; 3)$, $\mathbf{c}(-4; 3; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -6; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 2; 4)$, $\mathbf{b}(1; 2; 3)$, $\mathbf{c}(-8; -4; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 2; 5)$, $B(9; -5; 5)$, $C(9; -7; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(3; 8; 3)$, $B(3; 9; 1)$, $C(2; 8; 4)$, $D(7; 9; -3)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(6; 7; 5)$, $B(-1; 3; 8)$, $C(1; 2; 8)$, $D(3; 8; 4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x - 6y - 4z = -11$ и $\beta : x - z + 7 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-9; -1; 6)$, $B(-6; -8; 7)$, $C(-7; -7; 7)$, $S(-3; -6; 8)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(8; -3; 4)$ параллельно прямой $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{0}$ и перпендикулярно плоскости $-x - 7y + z - 3 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 7; 8)$, $B(6; 2; 1)$, $C(11; 14; 18)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ x + 5y - 19 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(18; -4; 15)$ относительно плоскости $7x - 3y + 6z + 7 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-5}{3}$ и плоскостью $\pi : 2x + 3y + 2z + 12 = 0$.

Вариант 4.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; -2)$, $\mathbf{b}(-5; 2; 0)$, $\mathbf{c}(-3; 1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; -1; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-2; 3; -1)$, $\mathbf{b}(5; -5; 1)$, $\mathbf{c}(1; -1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 2; 2)$, $B(-3; 4; 5)$, $C(-5; 5; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 7; 1)$, $B(6; 8; -1)$, $C(9; 1; -6)$, $D(0; 7; 2)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(0; 2; -3)$, $B(1; 3; -6)$, $C(3; 2; -4)$, $D(3; -1; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y + z + 13 = 0$ и $\beta : 6x - 2y - 6z = -13$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-7; -2; -8)$, $B(-6; -1; -8)$, $C(-11; -5; -7)$, и найти расстояние от точки $S(-1; -5; -3)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(8; -10; -4)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ и $\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+8}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 2; 7)$, $B(2; 8; 2)$, $C(2; 9; 1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 2y - z + 22 = 0 \\ 4x - y + z + 26 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-25; 26; 14)$ на плоскость $7x - 6y - 7z = -27$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $\pi : 2x - y - z + 5 = 0$.

Вариант 5.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 4; -3)$, $\mathbf{b}(1; 2; -1)$, $\mathbf{c}(4; -3; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; 9; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 2; -5)$, $\mathbf{b}(-4; 1; -6)$, $\mathbf{c}(-4; -1; 7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 6; 2)$, $B(1; 5; 1)$, $C(3; 7; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(9; 7; 8)$, $B(2; 10; 5)$, $C(14; 5; 10)$, $D(16; 12; 9)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-6; -7; -1)$, $B(-3; -2; -11)$, $D(-7; -7; -3)$, $A_1(-8; -9; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x - y + z = 6$ и $\beta : 3y - 3z - 10 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(6; 4; -9)$, $B(5; 6; -12)$, $C(7; 1; -7)$, $S(3; 0; 3)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-8; -5; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$ и перпендикулярно плоскости $x + y + 4z - 5 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 7; 0)$, $B(7; 12; -1)$, $C(-2; 1; 1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(8; -14; 16)$ на плоскость $x + 5y - 9z - 8 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-1}{-6} = \frac{y+7}{4} = \frac{z-8}{2}$ и плоскостью $\pi : x - y - z + 9 = 0$.

Вариант 6.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро AA_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 2; -3)$, $\mathbf{b}(-6; -3; 4)$, $\mathbf{c}(-1; -1; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 4; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(5; 10; 2)$, $\mathbf{b}(2; 5; 4)$, $\mathbf{c}(-3; -7; -5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 7; 8)$, $B(4; 14; 8)$, $C(4; 5; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(2; 2; 7)$, $B(4; 3; 4)$, $C(3; 5; 3)$, $D(3; 2; 6)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A_1(3; -10; 3)$, $A_2(1; -9; 7)$, $A_3(-4; -2; 8)$, $A_4(0; -8; 9)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y - z + 5 = 0$ и $\beta : 4x - 2y - 7z = -11$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-3; -7; -2)$, $B(5; -8; 0)$, $C(-2; -8; -1)$, $S(-6; -2; 1)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-10; 0; -7)$ перпендикулярно плоскостям $4x - y - 4z + 5 = 0$ и $-3x + y + 5z + 5 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 6; 4)$, $B(7; -2; 2)$, $C(4; 3; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 6y + z - 15 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; -3; 15)$ относительно плоскости $-y + 7z = 33$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-4}{-2}$ и плоскостью $\pi : x + 3y + z + 6 = 0$.

Вариант 7.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BC в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; -3; 3)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -3)$, $\mathbf{c}(-3; -4; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -4; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(4; -4; -1)$, $\mathbf{b}(-4; -3; 4)$, $\mathbf{c}(-1; -1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 9; 9)$, $B(0; 11; 10)$, $C(2; 10; 10)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(8; 8; 0)$, $B(12; 13; -4)$, $C(3; 3; 2)$, $D(11; 10; 3)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины D . $A(2; -6; -2)$, $B(-1; -10; 5)$, $C(-5; -15; -5)$, $D(1; -7; -4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + y + 4 = 0$ и $\beta : -3x + 4y - 8z = 13$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-8; 1; 4)$, $B(-7; 2; 5)$, $C(-6; 4; 13)$, и найти расстояние от точки $S(-1; 0; 1)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-6; -10; 10)$ параллельно плоскости $-7x + 3y + z + 4 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+8}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+7}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(9; 1; 5)$, $B(11; 2; 8)$, $C(14; 4; 13)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 3y - z + 2 = 0 \\ -x + 7y + 2z - 12 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-4; -8; 4)$ относительно плоскости $x + 3y + 3 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x + y - z = -9$.

Вариант 8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; 5; 2)$, $\mathbf{b}(1; -5; -2)$, $\mathbf{c}(6; -2; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; 8; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(4; 13; 0)$, $\mathbf{b}(-1; -3; 1)$, $\mathbf{c}(-2; -4; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 2; 5)$, $B(7; -2; 5)$, $C(7; -3; 6)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(9; 2; 8)$, $B(2; -6; 9)$, $C(10; 1; 10)$, $D(10; 5; 6)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(-6; -6; -6)$, $B(-8; -8; -3)$, $C(-6; -11; -7)$, $D(-3; -2; -10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x + 3z - 5 = 0$ и $\beta : 2x + y - 2z = 8$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-8; 0; -9)$, $B(-7; -1; -9)$, $C(-9; 8; -8)$, и найти расстояние от точки $S(4; -6; 1)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-6; -8; 6)$ параллельно прямой $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$ и перпендикулярно плоскости $5x + 3y + 8z + 4 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 6; 3)$, $B(5; 5; 0)$, $C(3; 8; 8)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 16 = 0 \\ x + 7y + 3z + 26 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(19; 18; -25)$ на плоскость $10x + 8y - 9z - 69 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и плоскостью $\pi : x - 2y + 2z = 11$.

Вариант 9.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -6; 4)$, $\mathbf{b}(-1; 4; -3)$, $\mathbf{c}(-2; -1; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; -1; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 6\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; -1; 4)$, $\mathbf{b}(-1; 1; -2)$, $\mathbf{c}(-1; -9; 11)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 9; 4)$, $B(-1; 8; 1)$, $C(12; 10; 6)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 6; 2)$, $B(9; 4; 7)$, $C(1; 5; 0)$, $D(1; 7; 2)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(8; 8; 1)$, $B(5; 4; -7)$, $D(9; 10; 1)$, $E(6; 5; -4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x - 6y + 7z = 13$ и $\beta : -x + z - 1 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-3; -3; -4)$, $B(-2; -2; -6)$, $C(-4; -8; -1)$, $S(-8; -1; 6)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(7; -2; 10)$ параллельно прямым $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+4}{-1}$ и $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-10} = \frac{z-1}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 3; 7)$, $B(6; 1; 4)$, $C(4; 2; 5)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - 14 = 0 \end{cases}$$
.
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; 8; 4)$ относительно плоскости $3x - 3y - 4z = 8$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+8}{-1}$ и плоскостью $\pi : -x - y + 2z = -14$.

Вариант 10.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; 2)$, $\mathbf{b}(-1; -3; -2)$, $\mathbf{c}(-3; -2; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 7; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -8\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-4; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-1; -15; -4)$, $\mathbf{c}(-1; 6; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 0; 9)$, $B(8; 1; 10)$, $C(10; 2; 8)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; -1; -2)$, $\mathbf{b}(3; 7; -4)$, $\mathbf{c}(2; 8; -3)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(0; 4; -3)$, $A_2(1; 5; 1)$, $A_4(3; 7; 5)$, $B_1(-2; 1; -10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x - z - 6 = 0$ и $\beta : x + 5y - 6z = -3$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(3; -1; 8)$, $B(-2; -6; 10)$, $C(4; 1; 7)$, $S(3; -1; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-4; 1; -6)$ параллельно прямым $\frac{x+6}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 1; 0)$, $B(3; -5; -4)$, $C(9; 2; 1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - 7y - z + 4 = 0 \\ x - 4y + 6 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-20; -22; 34)$ на плоскость $-4x - 3y + 8z = 62$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $\pi : x + 2y - z = -12$.

Вариант 11.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 1; 1)$, $\mathbf{b}(3; 1; 1)$, $\mathbf{c}(-4; 4; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-4; 10; 6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(4; -5; -7)$, $\mathbf{b}(2; -5; -9)$, $\mathbf{c}(-1; 2; 5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 0; 4)$, $B(7; 1; 8)$, $C(2; -1; -3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-1; 0; 1)$, $\mathbf{b}(0; -1; 2)$, $\mathbf{c}(-1; 2; -3)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(7; 5; -1)$, $B(9; 10; 2)$, $C(8; 1; 1)$, $D(6; 8; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -5x - 2y + 3z = -6$ и $\beta : -2x - z + 4 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(8; -3; -3)$, $B(9; 0; -1)$, $C(10; 1; 0)$, $S(-1; 6; 4)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1; 1; 1)$ параллельно плоскости $-x + 2y - 3z = 8$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 9; 6)$, $B(1; 8; 5)$, $C(8; 11; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x - 3y - 2z + 11 = 0 \\ -5x + 2y + z - 24 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(15; -9; -6)$ на плоскость $6x - y - z = -9$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-6} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1}$ и плоскостью $\pi : -x + y + z = 5$.

Вариант 12.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро AB в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 1; 3)$, $\mathbf{b}(-3; -6; 2)$, $\mathbf{c}(4; 0; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; 8; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 9\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-1; -1; -2)$, $\mathbf{b}(4; 3; 2)$, $\mathbf{c}(-14; -11; -10)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 6; 2)$, $B(13; 8; 1)$, $C(2; 5; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-1; 1; -1)$, $\mathbf{b}(3; -2; 1)$, $\mathbf{c}(2; -1; 0)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-5; 7; -4)$, $B(2; 0; 4)$, $D(-6; 9; -7)$, $A_1(-8; 9; -5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x + 2y + z = 10$ и $\beta : -3y - 3z - 3 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; -1; 0)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-4; -2; 1)$, и найти расстояние от точки $S(1; 4; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; 0; 5)$ параллельно прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{0}$ и перпендикулярно плоскости $-2x - 9y + z = -4$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 4; 0)$, $B(8; 6; -7)$, $C(9; 7; -10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 4y + z - 14 = 0 \\ x + 7y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-9; 33; 33)$ на плоскость $x - 6y - 9z + 32 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{2}$ и плоскостью $\pi : -x - y - z = -3$.

Вариант 13.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; -4)$, $\mathbf{b}(2; -4; -1)$, $\mathbf{c}(2; -2; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 3; 8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(3; 4; -3)$, $\mathbf{b}(1; -3; -6)$, $\mathbf{c}(1; -1; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 4; 2)$, $B(7; 1; 3)$, $C(6; 5; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(4; 7; 0)$, $B(0; 12; 6)$, $C(5; 6; -1)$, $D(5; 7; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(-2; 6; -1)$, $B(4; 7; 3)$, $C(-7; 5; -3)$, $D(1; 8; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 4x + 7y + 3z = -7$ и $\beta : x - y - 4 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(10; 4; -3)$, $B(13; 2; -2)$, $C(12; 3; 1)$, и найти расстояние от точки $S(2; -7; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; 2; -5)$ параллельно прямым $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+7}{4} = \frac{z+3}{0}$ и $\frac{x+8}{-1} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-5}{-1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 6; 6)$, $B(5; 8; 7)$, $C(3; 7; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 3y - 8 = 0 \\ x + 7y - z - 18 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-10; -6; 1)$ относительно плоскости $7x + y + 1 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-2}{-1}$ и плоскостью $\pi : -3x - 3y - z = 1$.

Вариант 14.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-4; 5; -1)$, $\mathbf{b}(-2; 2; 1)$, $\mathbf{c}(1; -2; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; 7; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 6\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(3; -5; 1)$, $\mathbf{b}(1; 1; -2)$, $\mathbf{c}(-1; 10; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 4; 9)$, $B(4; 1; 16)$, $C(5; 0; 18)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(7; 9; 7)$, $B(14; 4; 12)$, $C(5; 11; 6)$, $D(6; 11; 5)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A_1(4; -10; 1)$, $A_2(-3; -8; 0)$, $A_3(-3; -9; 2)$, $A_4(-6; -4; -5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - z - 6 = 0$ и $\beta : -4x - 4y + 8z = 8$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -10; -3)$, $B(4; -8; -2)$, $C(-1; -11; -3)$, и найти расстояние от точки $S(2; -7; 7)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-6; 2; 3)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+4}{3}$ и $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+5}{-2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 0; 1)$, $B(-2; 3; -9)$, $C(3; -1; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - 7y + z - 23 = 0 \\ 2x - 4y + z - 13 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-17; 4; -10)$ на плоскость $3x + y + 3z + 1 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+6}{-1}$ и плоскостью $\pi : 5x + 2y - 4z = -2$.

Вариант 15.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро AD в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; -2; -3)$, $\mathbf{b}(5; -1; -5)$, $\mathbf{c}(-1; 1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; -7; -9)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-7; 1; -3)$, $\mathbf{b}(-1; 1; 1)$, $\mathbf{c}(2; -6; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 5; 6)$, $B(5; 6; 5)$, $C(3; 11; 8)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-3; 8; -5)$, $\mathbf{b}(2; -3; 1)$, $\mathbf{c}(-1; -3; 4)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(-5; 12; -4)$, $B(-6; 5; -9)$, $C(-5; 1; -6)$, $D(-3; 6; 1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x + 3y + z = -4$ и $\beta : -2y - z - 6 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; 3; 6)$, $B(3; 4; 4)$, $C(-5; 2; 9)$, и найти расстояние от точки $S(6; 0; -4)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; -1; -1)$ перпендикулярно плоскостям $4x + 2y + 5z + 1 = 0$ и $3x + 3y + 4z + 2 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 2; 4)$, $B(9; 3; 6)$, $C(4; -1; -3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x - 3y + 6z + 5 = 0 \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(6; 6; 4)$ относительно плоскости $7x + 9y + 4z = 39$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-2}{3}$ и плоскостью $\pi : -2x + 3y + 2z = -4$.

Вариант 16.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро DD_1 в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 1; 2)$, $\mathbf{b}(-3; -3; -4)$, $\mathbf{c}(-3; -4; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 3; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-7; 2; 11)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -4)$, $\mathbf{c}(1; -2; -7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 9; 6)$, $B(6; 19; 4)$, $C(6; 16; 5)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(8; 8; 7)$, $B(7; 9; 5)$, $C(1; 10; 10)$, $D(9; 9; 4)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины D . $A(-6; -9; 6)$, $B(-7; -11; 11)$, $C(-9; -10; 5)$, $D(-3; -8; 4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y + z - 15 = 0$ и $\beta : -6x - 3y + 7z = -4$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; 1; -5)$, $B(0; 2; -4)$, $C(7; 0; -5)$, и найти расстояние от точки $S(2; -1; -4)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(9; 0; -1)$ перпендикулярно плоскостям $x + y + z - 7 = 0$ и $-x - 4y = 1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(9; 6; 3)$, $B(8; 7; 5)$, $C(7; 7; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + y + z + 19 = 0 \\ 6x - 2y - z - 28 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-9; 1; 6)$ относительно плоскости $3x - 2y - 3z + 14 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью $\pi : 2x - y + 5z - 3 = 0$.

Вариант 17.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро AB в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-6; 3; 1)$, $\mathbf{b}(1; -4; -3)$, $\mathbf{c}(-1; 5; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 0; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(1; -2; -2)$, $\mathbf{b}(3; -10; -5)$, $\mathbf{c}(-2; 2; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 6; 0)$, $B(-3; 7; 1)$, $C(8; 5; 0)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(6; -5; 0)$, $\mathbf{b}(1; 2; 2)$, $\mathbf{c}(-2; 3; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(-8; -7; -4)$, $B(-11; -2; 4)$, $C(-9; -10; 0)$, $D(-10; -8; 3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - y - z = -1$ и $\beta : 4x + 5z + 2 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; 5; 9)$, $B(8; 6; 8)$, $C(9; 7; 8)$, $S(3; -8; -2)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(7; -4; -2)$ перпендикулярно плоскостям $2x + 5y - z = 3$ и $x + y = -1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 6; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 3; -1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 9z + 30 = 0 \\ x - y + 8z + 21 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-7; -3; -28)$ на плоскость $x - 2y + 6z + 46 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{-4}$ и плоскостью $\pi : 2x - y - z = -11$.

Вариант 18.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро BC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; -4)$, $\mathbf{b}(2; -1; 0)$, $\mathbf{c}(-1; -2; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-8; 9; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(9; -11; -1)$, $\mathbf{b}(4; -5; -6)$, $\mathbf{c}(-5; 6; 7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 9; 9)$, $B(4; 8; 12)$, $C(1; 10; 7)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 5; 6)$, $B(5; 0; 12)$, $C(1; 7; 11)$, $D(4; 2; 11)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(3; -3; -9)$, $B(7; 4; -2)$, $D(2; -7; -11)$, $E(6; 6; -4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y - z + 12 = 0$ и $\beta : 4x + 2y + 3z = -2$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -9; 3)$, $B(3; -8; 2)$, $C(-1; -11; 7)$, и найти расстояние от точки $S(-3; 1; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(6; -3; 1)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+6}{0}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+4}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 9; 3)$, $B(2; 10; 6)$, $C(3; 12; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 9y + 2z + 16 = 0 \\ -x + 5y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-22; -20; -10)$ относительно плоскости $-7x - 8y - 5z = 19$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z+8}{1}$ и плоскостью $\pi : x + y - 3z = -2$.

Вариант 19.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -3; 3)$, $\mathbf{b}(3; 6; -2)$, $\mathbf{c}(0; 1; -4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; -2; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-3; 2; 2)$, $\mathbf{b}(-7; 5; 6)$, $\mathbf{c}(9; -11; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 8; 7)$, $B(10; 10; 4)$, $C(2; 9; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-4; 2; -3)$, $\mathbf{b}(-4; -2; -5)$, $\mathbf{c}(-3; 3; -2)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины Q . $P(6; -7; -1)$, $Q(16; -10; -5)$, $R(9; -8; -2)$, $S(4; -7; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x - y + 4z = 4$ и $\beta : -y - 2z + 8 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(7; 0; 6)$, $B(8; -1; 6)$, $C(6; 2; 7)$, $S(-4; 0; 2)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; -5; 0)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-2}$ и перпендикулярно плоскости $2x - 5y + z - 7 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 7; 8)$, $B(2; 4; 12)$, $C(0; 11; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 2x + y + 4z + 10 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-6; -11; 9)$ относительно плоскости $5x + 5y - 8z = 14$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+4}{2} = \frac{y+7}{-5} = \frac{z-3}{-3}$ и плоскостью $\pi : -x - y - z = -7$.

Вариант 20.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; 2)$, $\mathbf{b}(4; -2; 3)$, $\mathbf{c}(-2; 5; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; -5; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(7; -5; -7)$, $\mathbf{b}(-4; 3; 4)$, $\mathbf{c}(-3; 2; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 8; 3)$, $B(2; 5; 2)$, $C(-1; 10; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(5; 7; 8)$, $B(-1; 14; 16)$, $C(4; 8; 9)$, $D(4; 9; 11)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(-3; -4; 8)$, $A_2(1; 1; 10)$, $A_3(-2; 4; 8)$, $A_4(-1; -6; 9)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x + y - z = -8$ и $\beta : -x - y - 7 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(6; -8; -9)$, $B(11; -3; -11)$, $C(4; -12; -8)$, $S(-5; -3; -6)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 1; 8)$ параллельно плоскости $4x + 3y - 5z - 1 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{-3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 9; 0)$, $B(-1; 14; 7)$, $C(0; 11; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \\ x + 2y + 5z + 16 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(1; 1; 3)$ относительно плоскости $-6x - 9y - z = 41$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+7}{4} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-4}{2}$ и плоскостью $\pi : -x + y - 2z - 13 = 0$.

Вариант 21.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AD в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 3; -2)$, $\mathbf{b}(3; -2; 1)$, $\mathbf{c}(3; -3; -4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -2; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-7; -5; -4)$, $\mathbf{b}(-2; -1; -7)$, $\mathbf{c}(1; 1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 8; 2)$, $B(7; 10; -1)$, $C(7; 11; -2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-1; 3; -4)$, $\mathbf{b}(0; 1; -1)$, $\mathbf{c}(3; -5; 8)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(-4; -8; 7)$, $B(-4; -7; 5)$, $C(5; -12; 9)$, $D(-12; -7; 10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 7y + 3z + 1 = 0$ и $\beta : -x + y - z = -13$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; 10; -5)$, $B(3; 9; -5)$, $C(1; 8; -6)$, $S(0; -1; 6)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-5; -2; 5)$ параллельно плоскости $2x - 3y + z = 8$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+4}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 7; 2)$, $B(8; 10; -3)$, $C(3; 3; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 21 = 0 \\ -x + y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$
.
14. Найти проекцию точки $M(-14; -9; -6)$ на плоскость $x + y - z = -5$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{-2}$ и плоскостью $\pi : -2x - y + z = -14$.

Вариант 22.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро AA_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-4; -2; -3)$, $\mathbf{b}(-5; -1; -1)$, $\mathbf{c}(-3; -1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-2; 4; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-6; -5; 6)$, $\mathbf{b}(2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-4; -8; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 3; 5)$, $B(11; 0; 6)$, $C(7; 2; 5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(4; 0; 1)$, $B(2; 0; 2)$, $C(5; -2; 0)$, $D(0; 7; 5)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(-3; 6; 8)$, $A_2(-3; 8; 7)$, $A_3(1; 2; 5)$, $A_4(-4; 9; 7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + z + 9 = 0$ и $\beta : x + 7y + 6z = 7$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-1; 4; 7)$, $B(0; 6; 4)$, $C(1; 9; 2)$, $S(8; 0; -7)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; -6; -10)$ параллельно прямым $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+8}{1}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-4}{2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 1; 7)$, $B(13; 8; 9)$, $C(10; 4; 8)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z - 26 = 0 \\ 2x + y + z - 20 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(12; 20; -27)$ на плоскость $-x - 9y + 10z = 84$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+7}{2}$ и плоскостью $\pi : x + y - 2z + 13 = 0$.

Вариант 23.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро BC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; -1; -1)$, $\mathbf{b}(-4; 2; 1)$, $\mathbf{c}(-3; 1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; -2; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-3; 3; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 0; 6)$, $B(5; -9; 6)$, $C(5; -7; 7)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(3; 5; 5)$, $B(4; 8; 0)$, $C(3; 6; 3)$, $D(2; 5; 4)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(9; -8; -4)$, $B(12; -4; -9)$, $D(11; -5; -8)$, $E(7; -11; -6)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x - 3y + 8z = -4$ и $\beta : x - z + 7 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(10; -3; -8)$, $B(11; 5; -9)$, $C(11; 4; -8)$, и найти расстояние от точки $S(-4; -3; 1)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; 5; 7)$ перпендикулярно плоскостям $x + y + z - 7 = 0$ и $-2x - y = 2$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 8; 2)$, $B(2; 10; 2)$, $C(2; 9; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -4x - y + 5z - 10 = 0 \\ -5x - y + 4z - 23 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-12; -2; -15)$ на плоскость $4x + 3y + 5z + 29 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$ и плоскостью $\pi : -4x - 6y + 2z + 2 = 0$.

Вариант 24.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; -4; -5)$, $\mathbf{b}(-4; -1; 3)$, $\mathbf{c}(6; 3; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -1; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-7; -4; 4)$, $\mathbf{b}(4; 3; -9)$, $\mathbf{c}(-5; -2; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 0; 8)$, $B(-6; 2; 11)$, $C(-2; 1; 10)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(8; 8; 9)$, $B(2; 11; 1)$, $C(11; 7; 13)$, $D(12; 9; 16)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(3; 1; 9)$, $B(8; 0; 7)$, $C(9; -3; 4)$, $D(5; -2; 6)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + y - z = -12$ и $\beta : 3y - 7z - 14 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; 6; 2)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(-4; 9; 4)$, и найти расстояние от точки $S(1; -5; -6)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(9; 3; 0)$ параллельно плоскости $2x - y - 3z = -9$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+8}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{5}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 1; 0)$, $B(-3; 0; 2)$, $C(-2; 0; 1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 3y - z - 3 = 0 \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; 7; -10)$ относительно плоскости $x + 3y - 4z + 5 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+2}{-3}$ и плоскостью $\pi : -3x + 2y - z - 2 = 0$.

Вариант 25.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; -4; -3)$, $\mathbf{b}(-2; -3; -1)$, $\mathbf{c}(1; 0; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 0; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; -1; -1)$, $\mathbf{b}(2; 2; 1)$, $\mathbf{c}(-1; 1; 0)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 9; 2)$, $B(-4; 11; 1)$, $C(-5; 10; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-6; 3; -7)$, $\mathbf{b}(2; 0; 1)$, $\mathbf{c}(5; -2; 4)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины D . $A(-1; 6; -6)$, $B(6; 1; -11)$, $C(-5; 9; -11)$, $D(0; 5; -9)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 4x - y - 2z = -8$ и $\beta : 2y + 2z + 10 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; -6)$, $B(3; -1; -9)$, $C(-2; 2; -5)$, и найти расстояние от точки $S(0; -3; -1)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; 3; -2)$ параллельно прямой $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{0}$ и перпендикулярно плоскости $-x - y - z - 4 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 7; 8)$, $B(4; 8; 7)$, $C(6; 5; 8)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 15 = 0 \\ x + 2y - 2z + 16 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(27; 20; -19)$ на плоскость $-10x - 9y + 9z + 97 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+8}{-1}$ и плоскостью $\pi : 5x + 2y + 6z = 9$.

Вариант 26.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро BC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 1; -3)$, $\mathbf{b}(-4; -5; -5)$, $\mathbf{c}(0; -1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; -1; 8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 8\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; -7; 5)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -2)$, $\mathbf{c}(-3; 2; -5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 9; 6)$, $B(-4; 10; 6)$, $C(4; 7; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(4; 3; 3)$, $B(13; 7; 7)$, $C(8; 10; 5)$, $D(6; 2; 4)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины Q . $P(7; 9; -4)$, $Q(8; 12; 0)$, $R(8; 6; -12)$, $S(9; 8; -11)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + y - 7 = 0$ и $\beta : 5x + 7y - 5z = -11$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 1; -4)$, $B(9; 2; -4)$, $C(-6; 0; -3)$, и найти расстояние от точки $S(7; 4; 4)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; 6; -8)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x - y = 1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 1; 5)$, $B(8; -3; 8)$, $C(8; -2; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - y - 7z - 19 = 0 \\ -x + y + 5z + 12 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(9; -7; -5)$ на плоскость $-4x - y + z - 20 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$ и плоскостью $\pi : x + y + 2z - 10 = 0$.

Вариант 27.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -1; 2)$, $\mathbf{b}(-4; 5; 5)$, $\mathbf{c}(4; -5; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; 6; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-4; -6; -3)$, $\mathbf{b}(11; 14; 11)$, $\mathbf{c}(-3; -4; -3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 1; 4)$, $B(7; 4; 3)$, $C(5; -1; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(6; 9; 0)$, $B(7; 13; 3)$, $C(12; 9; -1)$, $D(5; 6; -2)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-1; -7; -5)$, $B(3; -12; 2)$, $D(1; -8; -4)$, $E(-2; -4; -10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 3x - z + 3 = 0$ и $\beta : x + 4y - z = -14$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; -4; 7)$, $B(0; -3; 8)$, $C(3; -5; 7)$, и найти расстояние от точки $S(-4; 2; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-6; -4; 2)$ параллельно плоскости $x + 4y - 2z = -9$ и перпендикулярно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+8}{-1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 2; 3)$, $B(8; 3; 4)$, $C(8; 4; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y - 3z + 29 = 0 \\ 2x + y + z + 10 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(8; -11; -15)$ на плоскость $-x + 6y + 8z - 8 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и плоскостью $\pi : 2x + 7y - z + 9 = 0$.

Вариант 28.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; 3; 2)$, $\mathbf{b}(-3; 4; 3)$, $\mathbf{c}(3; -2; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -1; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 6\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 8\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-3; 1; 1)$, $\mathbf{b}(5; -4; -1)$, $\mathbf{c}(1; 1; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 7; 5)$, $B(5; 11; 0)$, $C(1; 8; 4)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(6; 5; 5)$, $B(11; 11; 1)$, $C(7; 6; 4)$, $D(6; 6; 6)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(3; -7; 5)$, $A_2(-2; -11; 2)$, $A_4(-3; -12; 3)$, $B_1(-1; -10; 7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y - z - 13 = 0$ и $\beta : 4x + 4y + 6z = -13$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(9; 8; -8)$, $B(7; 12; -9)$, $C(8; 7; -9)$, и найти расстояние от точки $S(2; 2; 2)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; -8; 6)$ параллельно прямым $\frac{x+7}{9} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{2}$ и $\frac{x+8}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 3; 9)$, $B(16; 1; 16)$, $C(3; 4; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 2y - 14 = 0 \\ -2x - 3y - z + 26 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(25; 25; -29)$ на плоскость $-4x - 5y + 5z = -106$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и плоскостью $\pi : -2x - y + z - 8 = 0$.

Вариант 29.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 2; 3)$, $\mathbf{b}(-4; 5; 6)$, $\mathbf{c}(3; 0; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(7; 3; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-5; 6; 2)$, $\mathbf{b}(2; 1; -6)$, $\mathbf{c}(12; -16; -9)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 3; 4)$, $B(13; 1; 3)$, $C(8; 4; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(5; 4; 0)$, $B(0; 7; -2)$, $C(7; 9; -3)$, $D(6; 2; 1)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(7; 3; -6)$, $B(5; 2; -1)$, $D(11; -4; 0)$, $E(6; 1; -1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y - z + 6 = 0$ и $\beta : 7x - 6y + 2z = -2$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-9; 9; -1)$, $B(-7; 10; -3)$, $C(-4; 12; -2)$, $S(-8; -6; 7)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(0; -3; -7)$ параллельно прямым $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+4}{-5}$ и $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-5}{-3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 7; 2)$, $B(-6; 8; 10)$, $C(-7; 8; 11)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + y - z - 4 = 0 \\ -2x + y + z - 9 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-7; -2; 10)$ относительно плоскости $2x - y - 3z + 7 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-7}{-1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z+5}{2}$ и плоскостью $\pi : -3x - y - 3z - 12 = 0$.

Вариант 30.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро DC в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 5; 2)$, $\mathbf{b}(4; -1; 2)$, $\mathbf{c}(-1; -4; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-3; 5; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(4; 3; 5)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -3)$, $\mathbf{c}(0; 2; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 5; 5)$, $B(8; 10; 6)$, $C(5; 3; 4)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(7; 2; -9)$, $\mathbf{b}(-1; 0; 1)$, $\mathbf{c}(-7; -1; 8)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(0; 0; -7)$, $Q(-1; -3; 0)$, $R(4; 1; -7)$, $S(-1; -4; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y - z + 8 = 0$ и $\beta : -2x + y + 9z = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(5; -1; 5)$, $B(4; -3; 4)$, $C(6; 0; 3)$, $S(7; -6; -8)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-4; 0; -10)$ параллельно плоскости $-x + 4y + 3z + 7 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+6}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+5}{2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 4; 7)$, $B(9; 3; 6)$, $C(5; 8; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -2x + 10y + z - 24 = 0 \\ -x + 9y - 17 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; 0; 4)$ относительно плоскости $7x + z = -28$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z+6}{1}$ и плоскостью $\pi : -2x + 2y - 2z = -2$.

Вариант 31.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро BB_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 6; -2)$, $\mathbf{b}(2; -6; 3)$, $\mathbf{c}(4; -1; -4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; 1; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-7; 4; 6)$, $\mathbf{b}(-1; 3; -1)$, $\mathbf{c}(4; -1; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 8; 6)$, $B(9; 1; 7)$, $C(6; 9; 6)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(7; 3; 3)$, $B(4; 2; 1)$, $C(6; 3; 2)$, $D(1; 4; -4)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(-6; -4; 5)$, $A_2(-4; -5; 3)$, $A_4(-8; -3; 6)$, $B_1(-3; -6; 1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -5x - 5y - 4z = -9$ и $\beta : y + z - 13 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-3; 0; 4)$, $B(-4; -2; 4)$, $C(0; 7; 3)$, $S(5; 7; -8)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; -1; -1)$ параллельно прямым $\frac{x}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-5}{0}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-3}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 5; 5)$, $B(8; 6; 4)$, $C(-1; 2; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -4x + 2y - z + 6 = 0 \\ 7x - 3y + 2z - 14 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-9; 22; 3)$ относительно плоскости $-2x + 9y + z - 4 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x - y - 2z = -13$.

Вариант 32.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро CC_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; 5; 2)$, $\mathbf{b}(-4; -3; -1)$, $\mathbf{c}(2; 4; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(2; 4; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-5; 4; 4)$, $\mathbf{b}(6; -5; -5)$, $\mathbf{c}(14; -9; -12)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 3; 7)$, $B(11; 4; 7)$, $C(-1; 2; 8)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(7; 8; 1)$, $B(8; 13; 5)$, $C(7; 9; 2)$, $D(6; 6; 0)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(2; -8; 2)$, $B(-3; -13; -2)$, $D(7; -5; 2)$, $A_1(4; -5; 5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x + y + 2z = -2$ и $\beta : x + z + 1 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-1; 1; -2)$, $B(4; 2; -1)$, $C(1; 2; 0)$, $S(-8; 6; -8)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(3; -2; 1)$ параллельно прямой $\frac{x-4}{9} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x + y = -4$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 0; 1)$, $B(5; 3; 2)$, $C(-2; -2; 0)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -4x + y - 14 = 0 \\ -9x + y + z - 24 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-5; 8; 3)$ на плоскость $-x - y - z - 6 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{3}$ и плоскостью $\pi : x + 2y + 2z + 1 = 0$.

Вариант 33.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро BB_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 1; 3)$, $\mathbf{b}(3; 0; -1)$, $\mathbf{c}(2; 3; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; -6; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-3; 3; -1)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(11; -2; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 9; 8)$, $B(0; 6; 3)$, $C(5; 10; 11)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; -1; 1)$, $\mathbf{b}(2; 1; -4)$, $\mathbf{c}(-1; 0; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(-7; 9; 8)$, $A_2(-12; 11; 16)$, $A_3(-14; 11; 0)$, $A_4(-3; 8; 13)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 2z + 1 = 0$ и $\beta : -6x + y - z = -10$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-4; -4; 5)$, $B(1; -3; 4)$, $C(-7; -3; 5)$, и найти расстояние от точки $S(-5; -1; 8)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; -4; 6)$ перпендикулярно плоскостям $-x - 5y - z + 4 = 0$ и $x + 3y - 4 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 4; 0)$, $B(-6; 11; -8)$, $C(5; -2; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ -x - y + z - 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(15; -9; 2)$ на плоскость $-2x + y + 2z + 8 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $\pi : -x - 5y - 5z = -8$.

Вариант 34.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро BB_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-2; -1; -2)$, $\mathbf{c}(-1; 2; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; 9; -7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(3; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-7; 3; -1)$, $\mathbf{c}(11; -1; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 8; 2)$, $B(3; 5; 3)$, $C(2; 9; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; 1; -2)$, $\mathbf{b}(2; 7; -9)$, $\mathbf{c}(3; 7; -10)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(0; -8; 5)$, $A_2(8; -2; 14)$, $A_3(-2; -9; 0)$, $A_4(-1; -10; 7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2y + z + 13 = 0$ и $\beta : x + 3y - 3z = 5$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(6; 10; -3)$, $B(5; 11; -2)$, $C(13; 8; -4)$, и найти расстояние от точки $S(-7; -5; 2)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(3; 2; -5)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x + y + 1 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 4; 8)$, $B(8; 5; 8)$, $C(5; 3; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -7x + y + z + 6 = 0 \\ 5x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(8; -3; 3)$ относительно плоскости $-9x + 7y - 4z + 32 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+4}{-2}$ и плоскостью $\pi : x + 3y - z - 4 = 0$.

Вариант 35.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро DC в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 3; 0)$, $\mathbf{b}(-1; 1; 2)$, $\mathbf{c}(6; -5; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; -2; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -5\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -6\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 4\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; 2; -1)$, $\mathbf{b}(-2; -3; 1)$, $\mathbf{c}(-1; 0; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 9; 0)$, $B(9; 11; -1)$, $C(-5; 6; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(0; -2; 3)$, $\mathbf{b}(1; -3; 2)$, $\mathbf{c}(-3; 3; 7)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-9; -5; -9)$, $B(-5; -6; -10)$, $D(-6; -6; -10)$, $A_1(-8; -3; -11)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x - 5y - z = -12$ и $\beta : -x - y + 3 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 0; -1)$, $B(5; -1; -1)$, $C(3; 4; 0)$, и найти расстояние от точки $S(6; -6; 5)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-7; 2; 1)$ параллельно прямой $\frac{x+8}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ и перпендикулярно плоскости $3x - 2y + z = 8$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 8; 9)$, $B(2; 7; 10)$, $C(7; 11; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + 2y + z - 7 = 0 \\ -3x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(1; 3; -2)$ относительно плоскости $8x + y - z + 20 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{-2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-4}{4}$ и плоскостью $\pi : -x + y - 2z = -6$.

Вариант 36.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро DC в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; -5; -2)$, $\mathbf{b}(-1; 6; -2)$, $\mathbf{c}(-1; 2; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 7; -7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; 3; -2)$, $\mathbf{b}(2; -1; 1)$, $\mathbf{c}(-4; -8; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 1; 3)$, $B(6; 4; -2)$, $C(3; 0; 2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(0; 7; 8)$, $B(-6; 4; 16)$, $C(-4; 4; 15)$, $D(-1; 8; 6)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(4; -5; -9)$, $B(8; -10; -7)$, $D(3; -2; -9)$, $E(5; -3; -8)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x - 2y + z = 1$ и $\beta : -5x - y - 14 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; -2; 2)$, $B(5; 7; 9)$, $C(2; 2; 5)$, и найти расстояние от точки $S(4; -2; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(5; -3; 9)$ параллельно плоскости $x + 3y = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 4; 3)$, $B(0; 0; 4)$, $C(4; 5; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 3y - 2z - 1 = 0 \\ -6x + 8y + 5z + 7 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(9; -17; -3)$ относительно плоскости $-5x + 9y + 2z = -39$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-5}{5} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{-4}$ и плоскостью $\pi : x - y + z = 1$.

Вариант 37.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AB в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -5; -2)$, $\mathbf{b}(5; 4; 4)$, $\mathbf{c}(3; 4; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; 6; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(1; -1; -1)$, $\mathbf{b}(-15; 10; 12)$, $\mathbf{c}(5; -6; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 1; 7)$, $B(3; 8; 17)$, $C(8; -4; 0)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 4; 3)$, $B(7; 13; 5)$, $C(6; 10; 4)$, $D(-2; -3; 2)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(4; 8; 4)$, $B(3; 12; 6)$, $C(6; 7; 5)$, $D(1; 10; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x - y + 7 = 0$ и $\beta : 2x + 5y - 4z = 6$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 10; 0)$, $B(9; 11; -1)$, $C(7; 11; 0)$, и найти расстояние от точки $S(-7; 3; 3)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(6; 8; 4)$ параллельно плоскости $2x - 5y + z - 8 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-5}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 8; 3)$, $B(2; 1; -1)$, $C(6; 10; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x - y - 2 = 0 \\ 7x - 3y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; 15; -1)$ относительно плоскости $-x - 7y + 2z = 29$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$ и плоскостью $\pi : 2x - 3y + z = -5$.

Вариант 38.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; -1; -1)$, $\mathbf{b}(1; 2; 1)$, $\mathbf{c}(-1; -1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-10; -8; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; -2; 3)$, $\mathbf{b}(16; 15; -4)$, $\mathbf{c}(-5; -5; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 7; 7)$, $B(15; 8; 7)$, $C(10; 8; 8)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(5; 8; 1)$, $B(4; 6; 2)$, $C(5; 14; 0)$, $D(7; 9; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(7; 3; -6)$, $B(8; 0; -6)$, $C(3; -3; -3)$, $D(1; -5; -1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + 5y - 2z = 1$ и $\beta : -x + y + 2 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; -2; -1)$, $B(6; -1; -3)$, $C(3; -3; 0)$, и найти расстояние от точки $S(-1; -4; 7)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; 0; 7)$ параллельно прямым $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+6}{1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-3}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 2; 8)$, $B(5; 0; 5)$, $C(7; 3; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 27 = 0 \\ 2x + y - 3z + 19 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(1; 9; -11)$ на плоскость $-x - 2y + 3z + 24 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-7}{2}$ и плоскостью $\pi : -x - y + 3z - 5 = 0$.

Вариант 39.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(0; -2; -3)$, $\mathbf{b}(-1; -1; -2)$, $\mathbf{c}(4; -3; -4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(10; -7; -10)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(3; 4; -5)$, $\mathbf{b}(2; 4; -5)$, $\mathbf{c}(1; -4; 11)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 8; 8)$, $B(-1; 9; 8)$, $C(9; 7; 9)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; -9; -5)$, $\mathbf{b}(-1; 8; 2)$, $\mathbf{c}(1; -3; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины Q . $P(-3; 9; 0)$, $Q(1; 18; -10)$, $R(0; 8; -1)$, $S(-1; 8; 0)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y - 2z - 12 = 0$ и $\beta : -4x - y - 2z = 7$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; -9; 1)$, $B(2; -6; 0)$, $C(1; -7; -3)$, и найти расстояние от точки $S(1; -3; -6)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; -2; -1)$ перпендикулярно плоскостям $3x + 3y - 2z - 1 = 0$ и $-4x - 5y + 3z = 6$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 0; 3)$, $B(1; 1; 3)$, $C(-2; -1; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 12 = 0 \\ -x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(37; 3; 30)$ на плоскость $-9x - 2y - 6z = -35$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $\pi : x - y + z - 10 = 0$.